INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN VASLUI

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN VASLUI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 19.02.2017
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X-a

1. Fie expresia E(x) = $\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{x^2-4x+20}$.

a) Aflați minimul expresiei E(x).

b) Rezolvați ecuația E(x) = 15.

c) Demonstrați că numărul n = $\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}$ este număr întreg.

Soluție:

1) a) E(x) = $\sqrt{(x-2)^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+16}$......................................1p

$(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow E_{min} = \sqrt{1}+\sqrt{16}=5$..1p

b) $(x-2)^2 = a \geq 0$

$\sqrt{a+1}+\sqrt{a+16}=15 \Rightarrow a=48$ 2p

$x-2 = \pm 4\sqrt{3}$ $x_1 = 2+4\sqrt{3}$ $x_2 = 2-4\sqrt{3}$ 1p

c) $16+8\sqrt{5} = (1+\sqrt{5})^3$ 1p

$16-8\sqrt{5} = (1-\sqrt{5})^3$

$n = 1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5} = 2 \in Z$ 1p

2. Se consideră numerele a = $\log_2 3$ si b = $\log_3 5$.

a) Determinați valoarea expresiei E = $4^a - 3^b$.

b) Demonstrați ca a > b.

Soluție:

a) E = $4^{\log_2 3} - 3^{\log_3 5}$ 1p

$= 2^{2\log_2 3} - 3^{\log_3 5}$ 1p

= 9 – 5 ....2p

= 4 ....1p

b) $\log_2 3 > \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$ 2p

3. a) Aflați partea reală a numărului complex z= $\sum_{k=0}^{2016}(k+1)\cdot i^k$.

b) Rezolvați în C ecuația $\frac{z+i}{\bar{z}+i}$=1+2i.

c) Calculați S=$z_1{}^4$+$z_2{}^4$, unde z_1,z_2 sunt soluțiile ecuației z^2+2z+2=0,z_1,z_2 $\in \mathbb{C}$.

Soluție:

a) $z = i^0 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + ... + 2017\, i^{2016}$

$z = 1 + 2i - 3 - 4i + 5 + 6i - 7 - 8i + ... + 2017$ 1p

Rez = 1 – 3 + 5 – 7 + ... 2013 – 2015 + 2017

Rez = -2 · 504 + 2017 = 1009 ....2p

b) a + bi + i = (1+2i)(a-bi+i) 1p

a = 1 b = 1 z = 1 + i 1p

c) $z^2 + 2z + 2 = 0$

$z_1 + z_2 = -2$

$z_1 \cdot z_2 = 2$ 1p

$z_1{}^2 + z_2{}^2 = 4$

$z_1{}^4 + 2z_1{}^2z_2{}^2 + z_2{}^4 = 16 \Rightarrow z_1{}^4 + z_2{}^4 = 16 - 8 = 8$ 1p

4. O albină zboară în primul cadran al unui sistem de coordonate (xOy) pe un grafic de ecuație y= 2^x+2^{-x}, x reprezentând timpul în minute și y distanța parcursă în centimetri.

a) În cât timp albina parcurge distanța de 2,5 m?

b) Demonstrați că f($\frac{1+3}{2}$) $\leq \frac{f(1)+f(3)}{2}$, y= f(x).

c) Aflați distanța parcursă de albină într-un timp x=$\log_{\sqrt{2}} 5$.

Soluție:

4) a) $2^x + 2^{-x} = 2{,}5$ 1p

$a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2a^2 - 5a + 2 = 0$

$a_1 = 2$ $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$ min

$a_2 = \frac{1}{2}$ $2^x = 2^{-1} \Rightarrow x = -1$ (F) 2p

b) $2f(2) \leq f(1) + f(3)$ 2p

$2\left(4 + \frac{1}{4}\right) \leq 2 + \frac{1}{2} + 8 + \frac{1}{8}$

$\frac{17}{2} \leq 10 + \frac{5}{8} \Rightarrow 68 \leq 85$ (A)

c) $2^{\log_{\sqrt{2}} 5} = 5^{\log_{\sqrt{2}} 2} = 5^2 = 25$.. 1p

$f(\log_{\sqrt{2}} 5) = 25 + \frac{1}{25} = 25 + 0{,}04 = 25{,}04$ cm...1p